

## Odsetki proste i złożone (procent składany)

(Opracowano na podstawie: Magdalena Dynus, Piotr Prewysz-Kwinto, *Matematyka finansowa*, Wyd: TNOiK)

Wartość pieniądza w czasie nie jest stała lecz ulega ciągłym zmianom. Zmiany te zmiany te dają się odczuć nawet intuicyjnie gdyż każdy z nas wolałby otrzymać 10 000 zł w chwili obecnej niż dopiero za dwa lata.

Zmianę wartości pieniądza w czasie można wyznaczyć. Służą do tego dwa działania: **oprocentowanie** i **dyskontowanie**.

Oprocentowanie jest to wyznaczenie przyszłej wartości danej kwoty kapitału przy określonych warunkach. Warunki te to:

- czas trwania lokaty,
- stopa procentowa.

Dyskontowanie jest działaniem odwrotnym do oprocentowania i polega na poszukiwaniu wartości bieżącej (obecnej) danej kwoty kapitału przy określonych warunkach.

Na podstawie powyższych definicji można ustalić cztery zmienne, które stosuje się do wyznaczenia zmiany wartości pieniądza w czasie. Tymi zmiennymi są:

$PV$  - wartość obecna, bieżąca (*Present value*),  
 $FV$  - wartość przyszła (*Future value*),  
 $t$  - okres czasu (czas trwania lokaty lub umowy kredytu),  
 $r$  - stopa procentowa.

Dodatkową zmienną wykorzystywaną przy określaniu zmiany wartości pieniądza w czasie jest wielkość odsetek uzyskanych w dowolnym okresie. Zmienna ta jest oznaczana symbolem  $I$  (od ang. Interest) i oblicza się jej wartość wzorem:

$$I = FV - PV$$

Obliczając zmiany wartości pieniądza w czasie możemy stosować dwa różne tryby naliczania odsetek: **rachunek odsetek prostych** oraz **rachunek odsetek złożonych** zwany też procentem składanym.

### Odsetki proste

W rachunku odsetek prostych odsetki są naliczane zawsze od tej samej kwoty kapitału. Uzyskane odsetki nie powiększają początkowej kwoty pieniędzy, lecz po naliczeniu są na bieżąco pobierane.

W rachunku odsetek prostych stosuje się następujące wzory:

1. Kwota odsetek uzyskanych w dowolnym okresie:

$$I = PV \cdot r \cdot t$$

2. Wartość przyszła danej kwoty kapitału:

$$FV = PV \cdot (1 + r \cdot t)$$

3. Wartość obecna danej kwoty kapitału:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r \cdot t)}$$

4. Wartość przyszła, gdy stopy procentowe są zmienne:

$$FV = PV \cdot (1 + r_1 \cdot t_1 + \dots + r_n \cdot t_n)$$

Stopa procentowa i czas muszą być zawsze wyrażone dla tych samych okresów czasu, tzn. jeżeli czas trwania lokaty określony jest w miesiącach, to również stopa procentowa musi być stopą miesięczną. Jeżeli w treści zadania te dwie wielkości nie są wyrażone dla tych samych jednostek czasu należy je odpowiednio przeliczyć sprowadzając czas trwania do jednostek, w których wyrażona jest stopa procentowa lub odwrotnie stopę procentową do jednostek, w których wyrażony jest czas trwania lokaty.

Obliczając końcową kwotę lokaty bankowej lub wielkość uzyskanych odsetek należy pamiętać o uwzględnieniu w obliczeniach faktycznej stopy procentowej, czyli stopy uwzględniającej podatek dochodowy zysków z inwestycji kapitałowych.

#### Odsetki złożone - procent składany

Rachunek odsetek złożonych (składanych) różni się tym od rachunku odsetek prostych, że naliczone w kolejnych okresach odsetki są **kapitalizowane**. Oznacza to, że powiększają one początkowy kapitał, który jest następnie podstawą do obliczenia odsetek za następny okres.

W rachunku odsetek składanych kwota lokaty będzie wzrastała szybciej niż w rachunku odsetek prostych, ponieważ odsetki w kolejnych okresach będą naliczane od coraz wyższej kwoty kapitału.

Do ustalania wartości przyszłej i obecnej w rachunku odsetek złożonych wykorzystywane są następujące wzory:

1. Wartość przyszła danej kwoty kapitału:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^t$$

2. Wartość obecna danej kwoty kapitału:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^t}$$

3. Wartość przyszła, gdy stopy procentowe są zmienne:

$$FV = PV \cdot (1 + r_1)^{t_1} \cdot (1 + r_2)^{t_2} \cdot \dots \cdot (1 + r_n)^{t_n}$$

Na podstawie wzoru po odpowiednich przekształceniach otrzymamy wzór na stopę procentową:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^t \iff \frac{FV}{PV} = (1 + r)^t \iff \sqrt[t]{\frac{FV}{PV}} = 1 + r \iff r = \sqrt[t]{\frac{FV}{PV}} - 1$$

oraz dla zmiennej  $t$  wykonujemy następujące przekształcenia:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^t \iff \frac{FV}{PV} = (1 + r)^t \iff \log \frac{FV}{PV} = t \cdot \log(1 + r) \iff t = \frac{\log \frac{FV}{PV}}{\log(1 + r)}$$

Ostatnie części powyższych wzorów opisują wartość stopy procentowej  $r$  oraz wartość zmiennej  $t$  w rachunku odsetek złożonych.

W rachunku procentu składanego odsetki naliczone w poszczególnych okresach mają różne wartości. Podamy więc także wzór na wielkość odsetek uzyskanych w jednym, dowolnie wybranym okresie kapitalizacji.

4. Wzór na odsetki za dany okres trwania lokaty:

$$I_i = PV \cdot (1 + r)^{i-1} \cdot r$$

gdzie:

$i$  - to dowolny okres kapitalizacji odsetek  $i = 1, 2, \dots, n$

We wzorze tym wyrażenie  $PV \cdot (1 + r)^{i-1}$  określa wielkość kapitału na chwilę poprzedzającą okres, za który należy wyznaczyć kwotę odsetek. Po pomnożeniu tej wartości przez stopę procentową uzyskamy wielkość odsetek za żądany okres.

Podobnie jak w rachunku odsetek prostych stopa procentowa i czas muszą być wyrażone dla tych samych okresów czasu. Jeśli na przykład doliczanie odsetek odbywa się co miesiąc, to czas i stopę procentową należy wyrazić w jednostkach miesięcznych.

Zmienna  $t$  w tej sytuacji oznacza czas trwania lokaty ale też liczbę dokonanych kapitalizacji.

Podatek dochodowy od zysków z inwestycji kapitałowych uwzględniany jest w rachunku odsetek złożonych w ten sam sposób jak w przypadku odsetek prostych, czyli poprzez wyliczenie faktycznej stopy procentowej zgodnie z zaprezentowanym wcześniej wzorem. W rachunku tym odsetki uzyskiwane w kolejnych okresach trwania lokaty będą najpierw pomniejszane o konieczny do zapłacenia podatek dochodowy, a dopiero później pozostała ich część, czyli odsetki netto, powiększy kapitał początkowy. Uzyskana w ten sposób kwota będzie stanowić podstawę do naliczenia odsetek

w następnym okresie.

### Kapitalizacja ciągła

Ciągła kapitalizacja odsetek jest szczególnym przypadkiem rachunku odsetek złożonych. Ma ona miejsce wówczas, gdy odsetki naliczane są w każdym momencie trwania lokaty, tzn. cały czas, bez przerwy. Liczba dokonywanych kapitalizacji w ciągu roku (oznaczana przez  $m$ ) zmierza w tej sytuacji do nieskończoności. Chcąc obliczyć wartość przyszłą lokaty kapitalizowanej w sposób ciągły, należy wyznaczyć następującą granicę:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{r \cdot m}$$

gdzie:

$r$  - roczna stopa procentowa,

$t$  - okres czasu w latach,

$m$  - liczba kapitalizacji dokonywana w ciągu roku.

Obliczenie powyższej granicy:

$$FV = \lim_{m \rightarrow \infty} PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{r \cdot m} = PV \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{r \cdot m}$$

Ponieważ  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m = e^r$ , więc:

$$FV = PV \cdot e^{t \cdot r}$$

gdzie:

liczba  $e$  to podstawa logarytmu naturalnego;  $e = 2,718\,281\,828$ .

Na podstawie poprzednich obliczeń możemy napisać następujące wzory:

5. Wartość przyszła przy kapitalizacji ciągłej:

$$FV = PV \cdot e^{r \cdot t}$$

6. Wartość obecna przy kapitalizacji ciągłej:

$$PV = \frac{FV}{e^{r \cdot t}}$$

7. Wartość przyszła gdy stopy procentowe są zmienne:

$$FV = PV \cdot e^{r_1 \cdot t_1 + \dots + r_n \cdot t_n}$$

Możliwe jest tu także wyznaczenie zworów na czas i stopę procentową. Obliczenie wygląda następująco:

$$FV = PV \cdot e^{r \cdot t} \iff \frac{FV}{PV} = e^{t \cdot r} \iff \ln \frac{FV}{PV} = (t \cdot r) \cdot \ln e$$

Ponieważ  $\ln e = 1$ , więc:

$$r \cdot t = \ln \frac{FV}{PV}$$

Dzieląc obie strony ostatniej równości przez  $t$  otrzymujemy wzór na stopę procentową przy kapitalizacji ciągłej:

$$r = \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{FV}{PV}$$

Dzieląc obie strony przez  $r$  otrzymamy wzór na okres czasu przy kapitalizacji ciągłej.

Korzystając z tych wzorów czas i stopa procentowa muszą być wyrażone dla tych samych okresów czasu. Podatek dochodowy uwzględnia się podobnie jak poprzednio przez wyznaczenie faktycznej stopy procentowej